



Olimpiada de Matematică –etapa locală- Galați

13 februarie 2010

Clasa a VII-a

SOLUȚII

Problema 1. Știind că numărul rațional $r = \overline{0,abc(d)} + \overline{0,bad(c)} + \overline{0,cda(b)} + \overline{0,dcba(a)}$ este fracție zecimală finită, să se demonstreze că $r \in \mathbb{N}$.

Viorica Bujor, profesor, Galați

Soluție: Condiții: $a, b, c, d \notin \{9\}$.

$$\begin{aligned}\overline{0,abc(d)} &= \frac{\overline{abcd} - \overline{abc}}{9000} = \frac{900 \cdot a + 90 \cdot b + 9 \cdot c + d}{9000}; \quad \overline{0,bad(c)} = \frac{\overline{badc} - \overline{bad}}{9000} = \frac{900 \cdot b + 90 \cdot a + 9 \cdot d + c}{9000}; \\ \overline{0,cda(b)} &= \frac{\overline{cdab} - \overline{cda}}{9000} = \frac{900 \cdot c + 90 \cdot d + 9 \cdot a + b}{9000}; \quad \overline{0,dcba(a)} = \frac{\overline{dcba} - \overline{dcb}}{9000} = \frac{900 \cdot d + 90 \cdot c + 9 \cdot b + a}{9000} \\ r &= \frac{1000 \cdot (a + b + c + d)}{9000} \Leftrightarrow r = \frac{a + b + c + d}{9};\end{aligned}$$

Din ipoteză, r este fracție zecimală finită. Atunci

$$\left. \begin{aligned} a + b + c + d &= 9 \cdot k, \quad k \in \mathbb{N} \\ \max(a + b + c + d) &< 36 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 9 \cdot k \in \{0, 9, 18, 27\} \Rightarrow k \in \{0, 1, 2, 3\}. \text{ Rezultă } r \in \{0, 1, 2, 3\} \subset \mathbb{N}.$$

Problema 2. Câte numere naturale de forma $A = \frac{7 \cdot n + 4}{5 \cdot n + 3} + \frac{13 \cdot m + 8}{5 \cdot m + 3}$, $m, n \in \mathbb{N}^*$, există?

Petre Bătrânețu, profesor, Galați

Soluție: Vom arăta că dacă $\frac{a}{b}$ și $\frac{c}{d}$ sunt fracții ireductibile și $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} \in \mathbb{N}$ atunci $b = d$.

$$\text{Într-adevăr, } \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d} \in \mathbb{N} \Rightarrow b \cdot d \mid a \cdot d + b \cdot c.$$

$$\left. \begin{aligned} b \cdot d \mid a \cdot d + b \cdot c \\ b \cdot d \mid b \cdot d \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} b \cdot d \mid a \cdot b \cdot d + b^2 \cdot c \\ b \cdot d \mid a \cdot b \cdot d \end{aligned} \right. \Rightarrow b \cdot d \mid b^2 \cdot c.$$

$$\left. \begin{aligned} b \cdot d \mid b^2 \cdot c \\ (c, d) = 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow d \mid b. \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} b \cdot d \mid a \cdot d + b \cdot c \\ b \cdot d \mid b \cdot d \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} b \cdot d \mid a \cdot d^2 + b \cdot c \cdot d \\ b \cdot d \mid c \cdot b \cdot d \end{aligned} \right. \Rightarrow b \cdot d \mid a \cdot d^2$$

$$\left. \begin{aligned} b \cdot d \mid a \cdot d^2 \\ (a, b) = 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow b \mid d. \quad (2)$$

Din (1) și (2) $\Rightarrow b = d$.

Să demonstrăm că $(7 \cdot n + 4, 5 \cdot n + 3) = 1$ și $(13 \cdot m + 8, 5 \cdot m + 3) = 1$.

Fie $p \in \mathbb{N}^*$, astfel încât

$$\left. \begin{matrix} p / 7 \cdot n + 4 \\ p / 5 \cdot n + 3 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left. \begin{matrix} p / 35 \cdot n + 20 \\ p / 35 \cdot n + 21 \end{matrix} \right\} \Rightarrow p / 1 \Rightarrow p = 1 \Rightarrow (7 \cdot n + 4, 5 \cdot n + 3) = 1.$$

Fie $q \in \mathbb{N}^*$, astfel încât

$$\left. \begin{matrix} q / 13 \cdot m + 8 \\ q / 5 \cdot m + 3 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left. \begin{matrix} q / 65 \cdot m + 40 \\ q / 65 \cdot m + 39 \end{matrix} \right\} \Rightarrow q / 1 \Rightarrow q = 1 \Rightarrow (13 \cdot m + 8, 5 \cdot m + 3) = 1.$$

Dar

$$A \in \mathbb{N} \Rightarrow 5 \cdot n + 3 = 5 \cdot m + 3 \Rightarrow m = n. \text{ Deci } A = \frac{7 \cdot n + 4}{5 \cdot n + 3} + \frac{13 \cdot n + 8}{5 \cdot n + 3} = \frac{20 \cdot n + 12}{5 \cdot n + 3} = 4 \in \mathbb{N}.$$

Așadar, există un singur număr natural $A = 4$.

Problema 3. Să se compare numerele:

$$A = \frac{1}{502} + \frac{1}{503} + \dots + \frac{1}{1002} + \frac{1}{1003} \quad \text{și} \quad B = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2005} - \frac{1}{2006}.$$

Romeo Zamfir, profesor, Galați

Soluție. Avem că

$$B = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2005} - \frac{1}{2006} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2005} + \frac{1}{2006} - 2 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2006} \right) =$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2005} + \frac{1}{2006} - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{1003} \right) = \frac{1}{1004} + \frac{1}{1005} + \dots + \frac{1}{2006}.$$

$$\text{Deci, } B = \frac{1}{1004} + \frac{1}{1005} + \dots + \frac{1}{2006} \quad \text{și}$$

$$A = \frac{1}{502} + \frac{1}{503} + \dots + \frac{1}{1003} = \frac{2}{1004} + \frac{2}{1006} + \dots + \frac{2}{2006}.$$

Prin urmare,

$$A = \frac{1}{1004} + \frac{1}{1004} + \frac{1}{1006} + \frac{1}{1006} + \frac{1}{1008} + \frac{1}{1008} + \dots + \frac{1}{2004} + \frac{1}{2004} + \frac{1}{2006} + \frac{1}{2006} \quad \text{și}$$

$$B = \frac{1}{1004} + \frac{1}{1005} + \frac{1}{1006} + \frac{1}{1007} + \frac{1}{1008} + \frac{1}{1009} + \dots + \frac{1}{2004} + \frac{1}{2005} + \frac{1}{2006}$$

Comparând termen cu termen, obținem că $A > B$.

Problema 4.

a) În exteriorul triunghiului $\triangle ABD$ se construiesc:

$$AE \perp AB, [AE] \equiv [AB], AH \perp AD, [AH] \equiv [AD].$$

Fie $M \in [BE], [MB] \equiv [ME], N \in [DH], [DN] \equiv [NH], O \in [BD], [OB] \equiv [OD]$ și $DE \cap BH = \{R\}$.

Să se demonstreze că: i) $BH \perp DE, [BH] \equiv [DE]$;

ii) $[OM] \equiv [ON]$ și $OM \perp ON$;

b) Pe laturile paralelogramului ABCD se construiesc în exteriorul acestuia

$$AE \perp AB, [AE] \equiv [AB], CF \perp CB, [CF] \equiv [CB], CG \perp CD, [CG] \equiv [CD] \text{ și}$$

$$AH \perp AD, [AH] \equiv [AD].$$

Dacă M, N, P, Q sunt mijloacele segmentelor $[BE], [DH], [DG]$ și respectiv $[BF]$, să se demonstreze că patrulaterul $MNPQ$ este pătrat.

Petre Bătrânețu, profesor, Galați

Soluție: a)

i) $\triangle ADE \equiv \triangle AHB (L.U.L) \Rightarrow [DE] \equiv [BH], \sphericalangle ADE \equiv \sphericalangle AHB$. Fie $AD \cap HR = \{S\}$.

Triunghiurile

$\triangle HAS$ și $\triangle DRS$ au: $\sphericalangle ADE \equiv \sphericalangle AHB$ și $\sphericalangle HSA \equiv \sphericalangle DSR$ (\sphericalangle -uri opuse la vârf).

Rezultă $m(\sphericalangle HAD) = m(\sphericalangle HRD) = 90^\circ \Rightarrow BH \perp DE$.

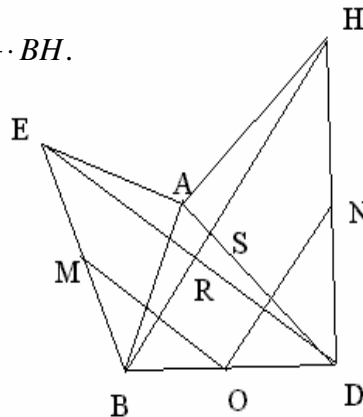
ii) În triunghiul

$\triangle DEB$, OM este linie mijlocie $\Rightarrow OM \parallel DE$ și $OM = \frac{1}{2} \cdot DE$.

$\triangle DBH$, ON este linie mijlocie $\Rightarrow ON \parallel BH$ și $ON = \frac{1}{2} \cdot BH$.

Dar $[DE] \equiv [BH] \Rightarrow [OM] \equiv [ON]$;

$BH \perp DE \Rightarrow OM \perp ON$.



b) Se aplică punctele i) și ii) triunghiurilor:

$$\triangle ABD \Rightarrow [DE] \equiv [BH], [OM] \equiv [ON] \text{ și } OM \perp ON;$$

$$\triangle BCD \Rightarrow [DF] \equiv [BG], [OP] \equiv [OQ] \text{ și } OP \perp OQ.$$

$$\triangle ADE \equiv \triangle CBG (L.U.L.) \Rightarrow [DE] \equiv [BG]$$

$$\triangle ABE \equiv \triangle CDG (L.U.L.) \Rightarrow [BE] \equiv [DG]$$

$$\left. \begin{array}{l} [DE] \equiv [BG] \\ [BE] \equiv [DG] \end{array} \right\} \Rightarrow EBGD \text{ paralelogram} \Rightarrow BE \parallel DG, [BE] \equiv [DG];$$

$$OM = \frac{1}{2} \cdot DE = \frac{1}{2} \cdot BG = OP;$$

$$\left. \begin{array}{l} OM \parallel DE \\ OP \parallel BG \\ DE \parallel BG \end{array} \right\} \Rightarrow M, O, P \text{ coliniare. Analog, punctele } N, O, Q, \text{ sunt coliniare.}$$

Rezultă că patrulaterul MNPQ este pătrat.

